Title	Kollektiv ノ Regellosigkeit ニ就テ
Author(s)	伊藤, 清; 河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 206 p.452-p.464
Issue Date	1940-12-16
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74825
rights	
Note	

895. *Kollektiv* ノ *Regellosigkeit* ニ就テ

伊藤　清
河田　敬義

R. v. Mises ノ Kollektiv ニヨル確率論ヲ巡ッテ幾ツカノ問題ガ引キオコサレテキルガ、其ノ一ツトシテ、確率ノ存在、其ノ加法性等ヲ公理ニオイテ出発スル確率論ノ立場カラ、Kollektiv ノ存在，意味等ヲ明カニシヨウトイフ問題モアル。

Kollektiv ノ定義カラ始メルト（問題ヲ簡單ニスルタメニ所謂 Alternativ 丈ヲ取扱フ。之レカラ一般ノ

Kollektiv ノ議論ヲ導クコトハ，例ヘバ P. Halmos, Invariants of certain stochastic transformations, Duke Math. J. 5 (1939), P. 465 ヲ参照)，アルニツノ Merkmal A, B ヲモツ偶然事象ガアルトキ，コノ偶然事象ニ属スル（独立）ノ試ミノ系列 $\{x_1^\circ, x_2^\circ, \cdots\cdots\}$ ヲ考ヘル。（x_n° ハ A 又ハ B）．コレヲ Alternativ トハ次ノ二條件ヲ満足スル時ニ云フ。

(1) $x_1^\circ, x_2^\circ, \cdots\cdots, x_n^\circ$ 中 A ノ數ヲ $r_n(A)$，B ノ數ヲ $r_n(B)$ トスル（$r_n(A)+r_n(B)=n$）。其ノ時

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n(A)}{n}=p_A,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{r_n(B)}{n}=p_B$$

ガ存在スル。

(2) 次ニ任意ノ Stellenauswahl ニヨリ $\{x_n^\circ\}$ ノ部分列 $\{x_{n_\nu}^\circ\}$ ヲ選ンダトキ，$x_{n_1}^\circ, \cdots\cdots, x_{n_\nu}^\circ$ 中ノ A, B ノ數ヲ夫々 $r'_\nu(A)$, $r'_\nu(B)$ トスル。其ノ時 (1) ニ得ラレタ p_A, p_B デ矢張リ

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{r'_\nu(A)}{\nu}=p_A,\quad \lim_{\nu\to\infty}\frac{r'_\nu(B)}{\nu}=p_B$$

ガ成立スル。

コノ場合 p_A, p_B ヲ夫々コノ Alternativ ニ於ケル A, B ノ確率ト呼ブ。

又 (2) ニ云フ Stellenauswahl トハ，x_n° ヲ部分列中ニ採用スルカシナイカハ $x_1^\circ, \cdots\cdots, x_{n-1}^\circ$ マデノ結果ヲ参照シテモヨイガ，$x_n^\circ, \cdots\cdots$ 以下ノ Merkmal トハ無関

係ニ定メル様ナ任意ノ選ビ方ヲ云フ。例ヘバ

(i) 豫メ $x_1^\circ, x_2^\circ, \cdots\cdots$ 以下ノ *Merkmal* トハ全ク無關係ニ，0 ト 1 トヲ勝手ニ並ベタ系列（例ヘバ（0, 1, 1, 0, 1, 0, ……）ノ如キモノ）ヲ作ツテオイテ，1 ニアタル番号丈ヲ選ブトイフコトニシテモヨイシ，又

(ii) 規則的ニ $f_n = 1$ 又ハ 0 ヲ，$x_1^\circ, \cdots\cdots, x_{n-1}^\circ$ ノ函數 $f_n = f_n(x_1^\circ, \cdots\cdots, x_{n-1}^\circ)$ トシテ定メテオイテ，其レニ從ツテ選ンデモヨイ。(i) ハコノ特別ノ場合デアル。

(iii) 然シ又 $x_1^\circ, \cdots\cdots, x_{n-1}^\circ$ ノ結果ヲ参照シツヽ然モ氣マグレニ x_n° ヲ採用シタリ，シナカッタリシテモヨイ。

此ノ *Kollektiv* ノ定義ニ対スル反対ノ一ツハ，スベテノ *Stellenauswahl* ニ対シテ (2) ノ成立スルトイフコトハ論理上不可能デアルトイフコトデアル。即チ (i) ノ形ノスベテノ *Stellenauswahl* 中ニハ，丁度 $x_n = A$ トナル n 丈ヲ選ブ結果ニナルモノモ含マレルコトニナル筈デアルカラ。其レ故ニコノ矛盾ヲ避ケルタメニ，*Regellosigkeit* ニ制限ヲ附ケルコトガ試ミラレタ。其レハ *Stellenauswahl* ヲ (ii) ノ形ノモノニ限リ，而モ豫メ或ル可算箇ノ *Stellenauswahl* ヲ指定シテオイテ，ソレニ對シテ (2) ガ成立スルトイフコトニスルノデアル。ソウスレバ *Kollektiv* ノ存在ガ証明サレ（Doob, Wald 等），且ツ其レニヨリ確率論モ展開サレル（Dörge 等）。

以上ノ制限ハ *Kollektiv* ニ基イテ確率論ヲ組立テルタメニハ止ムヲ得ナイコトデハアルガ，*Mises* ノ初メニ考

ヘタ *Regellosigkeit* トハ多少ハナレタモノニナッテキル様デアル。即チ "I say that the assumption that every kind of place selection (Stellenauswahl) must leave the limiting values of relative frequencies in a collective unchanged, is nothing more than the following convention: we agree that, <u>in a concrete case</u>, when a collective is subjected to a certain place selection, the limiting values of the relative frequencies remain unaffected by this selection. The randomness axiom does not require more than that." (Probability, Statistics and Truth, (1939), p. 139)

コンデ最初ノ問題ニ帰ルコトニスル。即チ *Kollektiv* ニヨリ確率ヲ定義スルトイフノデハナク，公理トシテ偶然事象ニ対シテ確率ガキマリ，且ツ加法性等ガ満足サレテキルトシテ，ソコカラ確率論ヲ作ルトイフ立場カラ，*Kollektiv* ヲ眺メルコトニスル。便宜上 A, B ナル *Merkmal* ヲ持ツ偶然事象ノ代リニ，$\alpha = p_B$, $\beta = -p_A$ ナル値ヲトル確率ガ夫々 p_A, p_B ナル如キ確率変数 x ヲ考ヘルト，x ノ平均値ハ0。此ノ偶然事象ニ属スル独立ナ試ミノ列ハ，互ニ独立デ x ト同一法則ヲ持ツ確率変数 x_n ノ系列 $\{x_1, x_2, \cdots\cdots\}$ デアラハサレル。一般ニ行ハレルヤウニ，カヽル無限列全体 Ω

ニ（無限次空間ノ直積ノ測度ヲ導入スル方法ニヨリ）確率ノ場ヲ拡大スル。

然ルトキハ大数ノ強法則ニヨッテ，Ω ノ確率 0 ノ場合ヲ除イテ，スベテノ Ω ノ元（x_1°, x_2°, ……）（x_n° ハ α 又ハ β）ニ対シテ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^\circ}{n}=0$$

x_1°, ……, x_n° 中 α, β ノ個数ヲ夫々 $\nu_n(\alpha)$, $\nu_n(\beta)$ トスレバ（$\nu_n(\alpha)+\nu_n(\beta)=n$），

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^\circ &= \frac{1}{n}(\alpha\,\nu_n(\alpha)+\beta\,\nu_n(\beta))\\ &= \frac{1}{n}\,(p_B\,\nu_n(\alpha)-p_A(n-\nu_n(\alpha)))\\ &= \frac{\nu_n(\alpha)}{n}-p_A\to 0,\end{aligned}$$

即チ

$$(3)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\nu_n(\alpha)}{n}=p_A,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\nu_n(\beta)}{n}=p_B$$

トナル。

サテ（2）ノ「任意ノ Stellenauswahl ニ対シテ」トイフコトノ解釈デアルが，上ノ"in a concrete case"トイフ語ト考へ合セテ，Stellenauswahl 全体ヲ単ニ論理的ニバラバラナ全体ト考ヘナイデ，アル人が実際ニ Stellenauswahl ヲ実行スルトイフコトヲ確率事象ト考ヘルコトニスル。即チ Auswahlfunktion y_n

(x_n^0ヲ部分列中ニ取リ入レヽバ $y_n=1$，然ラザレバ $y_n=0$）ヲ 0, 1 ナル値ヲトル『確率変数』トスル。且ツ Stellenauswahl ノ定義ニ従ッテ，y_n ハ $x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, y_1, \cdots, y_{n-1}$ トハ関係ガアッテモヨイガ，$x_n, x_{n+1}, \cdots\cdots$ トハ独立デアルトスル。

カヽル x_n ト y_m トノ関係ガ確率論的ニ意味ヲモツタメニハ，同時ニ $x_1, x_2, \cdots\cdots, y_1, y_2, \cdots\cdots$ ノスベテヲ入レル確率ノ場 Ω_0 ガ予メ定義サレテヰテ，且ツ任意ノ $x_1=x_1^0, \cdots\cdots, x_{n-1}=x_{n-1}^0, y_1=y_1^0, \cdots\cdots y_{n-1}=y_{n-1}^0$ ナル條件附ノ確率変数 y_n モヨノ場 Ω_0 デ定義サレテヰナクテハナラナイ。[1] Ω_0 ノ中ニハ前ニ考ヘタ確率ノ場 Ω：$\{(x_1, x_2, \cdots\cdots)=\mathfrak{X}\}$ モ含マレテ居リ，又 x_n, y_n ヲ同時ニ考ヘタ $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})=\begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots\cdots \\ y_1, y_2, \cdots\cdots \end{pmatrix}$ ナル並無限列ノ全体ノ作ル確率ノ場 Ω_1 モ入ッテヰルコトニナル。特ニ $\mathfrak{X}_0=(x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots)$ ナル任意ノ Ω ノ点ニ対スル Ω_1 ノ部分空間 $\Omega_1(\mathfrak{X}_0)$：$\left\{\begin{pmatrix} x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots \\ y_1, y_2, \cdots\cdots \end{pmatrix}\right\}$ ノ全体モ確率ノ場ヲ作リ，ソレガ丁度

---

(1) 勿論カヽル Ω_0 ヲ「von oben her」ニ前提シナクトモヨイ。$x_1, x_2, \cdots\cdots$ ノ各ノ分布（ソレハコノ場合皆同一）及ビ $x_1 x_2 \cdots x_n$ ガ與ヘラレタトキ y_n ノ條件附分布ヲ與ヘレバ「von unten her」ニ Ω_0 ヲ構成スルコトガ出来ル。論理的ニハ、何レニヨルモ同一デアルガ、認識過程カラ見レバ後者ノ方ガ適當デアル。

$\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_0$ ナル條件時ノ Ω_1 ノ確率ノ場トシテ與ヘラレルコトニナル。

此ノ時(2)ノ任意ノ Stellenauswahl ニ對シテ極限値ガ変ラナイトイフコトノ確率論的表現トシテ『確率ノ場 $\Omega:\{(x_1,x_2,\cdots\cdots)\}$ ノ確率 0 ノ場合ヲ除イタスベテノ点 $\mathfrak{z}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots\cdots)$ ニ對シテ次ノ性質ガ成立スル。

$\Omega_1(\mathfrak{z}_0):\left\{\begin{pmatrix} x_1^0, & x_2^0, & \cdots\cdots \\ y_1, & y_2, & \cdots\cdots \end{pmatrix}\right\}$ ノ任意ノ点

$$(\mathfrak{z}_0,\mathfrak{y}_0)=\begin{pmatrix} x_1^0, & x_2^0, & \cdots\cdots \\ y_1^0, & y_2^0, & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$ ニ對シテ

(4) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} y_r^0<\infty$$

デアルカ,

(5) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} y_r^0=\infty \text{ デ且ツ } \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{r=1}^{n} x_r^0 y_r^0}{\sum_{r=1}^{n} y_r^0}=0$$

ガ $\Omega_1(\mathfrak{z}_0)$ ノ確率 0 ノ場合ヲ除イテ成立スル。』

(5)ノ表現ハ $(x_1^0,x_2^0,\cdots\cdots)$ ニ對シテ, $y^0_{n_\nu}=1$ ニアタル n_ν 丈ヲ選ンデ部分列 $(x^0_{n_1},\cdots\cdots,x^0_{n_\nu},\cdots\cdots)$ ヲ作ルトキ, $\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{m} x^0_{n_\nu}=0$ トイフコト, 即チ(3)カラ $\mathfrak{y}_0$ ナル Stellenauswahl デ極限値 $p_A ; p_B$ ガ変ラナイコトニ當ル。

特ニ若シモ此ノ人ガ豫メ與ヘタ可算箇ノ(ii)ノ形ノ Stellenauswahl 丈ヲ施シテ見ヤウトイフ目論見ガアルナラバ,

カヽル Stellenauswahl ニ例ヘバ夫々 2^{-n} ($n=1,2,\cdots\cdots$) ナル確率ヲ予メ與ヘテオケバ，確率 0 ノ除外ハコノ場合全然除外ノナイコトニナリ。コノ Stellenauswahl 全体デ極限値ガカハラナイコトヲ意味スル。

此ノヤウニ Stellenauswahl ヲ確率事象ト考ヘルコトハ，特ニ近著ノ Amer. J. of Math. 62 (1940)。788〜791. Z. W. Birnbaum, H. S. Zuckermann, On the properties of a collective デ殆ンド同ジ形デ述ベラレテオルガ，ソコデハ（ハッキリ断ッテナイ言葉ヲ使ッテアッタリシテ）特別ノ場合ニモット強イ結果ヲ証明シテオル様ニ思ハレルノデ，コノ証明モ Doob, Note on probability, Annals of Math. 37 (1936), Halmos（前ニ挙ゲテアル）殆ンド其ノマヽ通用スルガ，念ノタメハッキリト上ノ命題ヲ証明スルコトヽスル。

今 $\Omega_1 : \left\{ (x, y) = \begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots\cdots \\ y_1, y_2, \cdots\cdots \end{pmatrix} \right\}$ 中 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \infty$ トナル部分空間ヲ E トスル。E ハコノ確率ノ場 Ω_1 デ probabisable デアル。次ニ

$$(6) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{r=1}^{n} x_r y_r}{\sum_{r=1}^{n} y_r} = 0$$

ノ成立スル Ω_1 ノ部分空間 F モ亦 probabisable デアル。其ノ時

$$(7)\quad P_r\left(\left(\Omega_1-E\right)+E\cdot F\right)=1$$

が証明サレヽバ，*Kolmogoroff* 流ニ（*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* 参照）*Nikodym* ノ定理ヲ用ヒテ條件附確率 P_{r_u} ヲ定義スレバ，

$$P_r(A)=\mathfrak{M}_u\left(P_{r_u}(A)\right)$$

が成立スルカラ

$$P_{r_{y=y_0}}\left(\left(\Omega_1-E\right)+E\cdot F\right)=1$$

が Ω 空間ノ確率 0 ノ y_0 ヲ除キ成立スル。即チコレが証明スベキ式デアッタ。故ニ (7) ヲ証明スレバヨイ。

先ヅ $p(E)=0$ ナラ (7) ハ明カデアルカラ，$p(E)\neq 0$ トスル。$\int_E f\,dp$ ヲ以後 $\mathfrak{M}_E$ デアラハスコトヽスル。$m_n=\mathfrak{M}_E(x_n)$ トオクト

$$(8)\quad \lim_{n\to\infty} m_n=0$$

が成立スル。ソレニハ任意ニ正數 ε ヲ與ヘタトキニ，Ω_1 ノ確率ノ入レ方カラ，Ω_1 ニ於ケル *finite cylinder set* E_0（即チ E_0 ハ $x_{\lambda_1},\cdots\cdots,x_{\lambda_s}$，$y_{\mu_1},\cdots\cdots,y_{\mu_t}$ 丈ニ関シテ定メラレル Ω_1 ノ部分集合）ヲ選ンデ

$p(E+E_0-EE_0)<\varepsilon$ ニスルコトが出来ル。$n_0=\underset{i,j}{\mathrm{Max}}(\lambda_i,\mu_j)$ トオケバ，$n>n_0$ ナル x_n ハ $x_{\lambda_1},\cdots\cdots,x_{\lambda_s}$，$y_{\mu_1},\cdots\cdots,y_{\mu_t}$ トハ独立デアルコトヽ，$\mathfrak{M}(x_n)=0$ 及ビ $|x_n|\leqq 1$ ナル性質カラ

$$|m_n|=|\mathfrak{M}_E(x_n)|=|\mathfrak{M}_{E_0}(x_n)+\mathfrak{M}_{E-EE_0}(x_n)-\mathfrak{M}_{E_0-EE_0}(x_n)|$$

$$\leqq |\mathfrak{M}(x_n)P_r(E_0)| + P_r(E - EE_0) + P_r(E_0 - EE_0) < \varepsilon,$$

$$n > n_0$$

トナルカラ、(8) ノ成立スルコトガワカル。

故ニコレカラ $\bar{x}_n = x_n - m_n$ ト置ケバ

$\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{m}\sum\limits_{r=1}^{m} m_{m_r} = 0$ ナル故

$$(6') \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{r=1}^{n} \bar{x}_r y_r}{\sum\limits_{r=1}^{n} y_r} = 0$$

ト (6) トハ同値デアルカラ、F ヲ (6') ノナリタツ Ω_1 ノ部分集合ト定義シテモヨイ。

サテ $\bar{x}_n$ ニツイテハ、$\mathfrak{M}_E(\bar{x}_n) = 0$ ト、

$\mathfrak{M}_E(\bar{x}_n^2) \leqq \mathfrak{M}_E(x_n^2) \leqq \mathfrak{M}(x_n^2) = \sigma^2$ ガ成リ立ツ。

次ニ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = \infty$ ナル y ニ対シテ $\theta_n(y)$ ヲ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$

$\sum\limits_{r=1}^{\theta_n} y_r = n,\ \sum\limits_{r=1}^{\theta_n - 1} y_r = n-1$ ニヨッテ定義スル。其ノ時任意ノ自然数ノ組 $a_1, \cdots\cdots, a_n$ ニ対シテ $E_{a_1\cdots\cdots a_n}$ ヲ $\theta_1 = a_1, \cdots\cdots, \theta_n = a_n$ トナル E ノ部分集合トスル。ソノ特性函数ヲ $C_{a_1\cdots\cdots a_n}$ トスル。明カニ

$$(9)\begin{cases} a_i \geqq a_{i+k}\ (k>0) \text{ ナラバ } E_{a_1\cdots\cdots a_n} = 0, \\ \qquad E_{a_1\cdots\cdots a_{n-1}a_n} \frown E_{a_1\cdots a_{n-1}a'_n} = 0 \quad (a_n \neq a'_n) \\ E = \sum\limits_{a_1=1}^{\infty}\cdots\cdots\sum\limits_{a_n=1}^{\infty} E_{a_1\cdots\cdots a_n}, \end{cases}$$

ヲ満足スル。今

$$(10) \quad \mathfrak{M}_E\left(\left(\sum_{r=1}^{\theta_n}\bar{x}_r y_r\right)^2\right) \leqq n\sigma^2 P_r(E)$$

ヲ証明スル。先ヅ $n=1$ ノ場合ニハ,

$$\mathfrak{M}_E\left(\left(\sum_{r=1}^{\theta_1}\bar{x}_r y_r\right)^2\right)=\sum_{a_1=1}^{\infty}\mathfrak{M}_E\left(\left(\sum_{r=1}^{\theta_1}\bar{x}_r y_r\right)^2 C_{a_1}\right)^*,$$

然ルニ $C_{a_1}=1$ ナル点デハ $\sum_{r=1}^{\theta_1}\bar{x}_r y_r=\bar{x}_{a_1}$, 且ツ C_{a_1} ハ $x_1, \cdots\cdots, x_{a_1-1}, y_1, \cdots\cdots, y_{a_1-1}$ ノ函数ナル故 $\bar{x}_{a_1}$ ト独立ナル故,

$$* =\sum_{a_1=1}^{\infty}\mathfrak{M}_E\left(\bar{x}_{a_1}^2 C_{a_1}\right)=\sum_{a_1=1}^{\infty}\mathfrak{M}_E\left(\bar{x}_{a_1}^2\right)\mathfrak{M}_E\left(C_{a_1}\right)$$

$$\leqq \sigma^2\sum_{a_1=1}^{\infty}P_r(E_{a_1})=\sigma^2 P_r(E).$$

即チ (10) ガ成立スル。數学的帰納法ニヨリ $n-1$ ノ時マデ (10) ガ成立シタトスレバ,

$$\mathfrak{M}_E\left(\left(\sum_{r=1}^{\theta_n}\bar{x}_r y_r\right)\right)^2=\mathfrak{M}_E\left(\left(\sum_{r=1}^{\theta_n-1}\bar{x}_r y_r\right)^2\right)$$

$$+\mathfrak{M}_E\left(\bar{x}_{\theta_n}^2 y_{\theta_n}^2\right)+2\mathfrak{M}_E\left(\bar{x}_{\theta_n}\left(\sum_{r=1}^{\theta_n-1}\bar{x}_r y_r\right)\right)^{\triangle}$$

ニテ先ヅ $\sum_{r=1}^{\theta_n-1}\bar{x}_r y_r=\sum_{r=1}^{\theta_{n-1}}\bar{x}_r y_r$ ナルコトト、帰納法ノ假定カラ, 右辺第一項 $\leqq (n-1)\sigma^2 P_r\{E\}$.

又 $n=1$ ノ場合同様 $C_{a_1\cdots\cdots a_n}$ ト $\bar{x}_{a_n}$ トハ独立ナル故

$$\sum_{a_1 \cdots a_n} \mathfrak{M}_E (C_{a_1 \cdots a_n} \bar{x}^2_{\theta_n} y^2_{\theta_n}) = \sum \mathfrak{M}_E (C_{a_1 \cdots a_n} \bar{x}^2_{a_n})$$

$$= \sum \mathfrak{M}_E (\bar{x}^2_{a_n}) \mathfrak{M}_E (C_{a_1 \cdots a_n})$$

$$\leqq \sigma^2 \sum_{a_1 \cdots a_n} P_r (E_{a_1 \cdots a_n}) = \sigma^2 P_r (E)$$

$$\text{第三項} = 2 \sum_{a_1 \cdots a_n} \mathfrak{M}_E \Bigl(C_{a_1 \cdots a_n} \bigl(\sum_{r=1}^{\theta_{n-1}} \bar{x}_r y_r\bigr) \bar{x}_{\theta_n}\Bigr)$$

$$= 2 \sum \mathfrak{M}_E \Bigl(C_{a_1 \cdots a_n} \bigl(\sum_{r=1}^{n-1} \bar{x}_{a_r}\bigr) \cdot \bar{x}_{a_n}\Bigr)$$

$$= 2 \sum \mathfrak{M}_E \Bigl(C_{a_1 \cdots a_n} \bigl(\sum_{r=1}^{n-1} \bar{x}_{a_r}\bigr)\Bigr) \mathfrak{M}_E (\bar{x}_{a_n}) = 0$$

故ニ $\Delta \leqq n\sigma^2 P_r(E)$ ガ成立ツ。

今度ハ F_ν $(\nu = 1, \cdots\cdots, n)$ ナラ E ノ部分集合ヲ

$$\underset{\mu \leqq \nu - 1}{Max} \Bigl| \sum_{r=1}^{\theta_\mu} \bar{x}_r y_r \Bigr| \leqq c\sqrt{n}\,\sigma, \quad \Bigl| \sum_{r=1}^{\theta_\nu} \bar{x}_r y_r \Bigr| > c\sqrt{n}\,\sigma$$

デ定メレバ，$\mu \neq \nu$ ナラ $F_\nu \frown F_\mu = 0$. 又上ノ場合ト同様 F_ν ノ特殊函数ヲ h_ν トスレバ．$h_\nu \cdot C_{a_1 \cdots\cdots a_\mu}$ $(\mu > \nu)$ ハ高々 $x_1, \cdots\cdots x_{a_{\mu-1}}, y_1, \cdots\cdots, y_{a_\mu}$ ニノミ關係スルカラ，$\nu \leqq n$ ナラバ

$$\mathfrak{M}_{F_\nu} \Bigl(\bigl(\sum_{r=1}^{\theta_n} \bar{x}_r y_r\bigr)^2\Bigr) = \mathfrak{M}_{F_\nu} \Bigl(\bigl(\sum_{r=1}^{\theta_\nu} \bar{x}_r y_r\bigr)^2\Bigr)$$

$$+ \sum_{\mu=\nu+1}^{n} \mathfrak{M}_{F_\nu} (\bar{x}^2_{\theta_\mu}) \geqq c^2 n \sigma^2 \cdot P_r (F_\nu).$$

$$\text{故ニ}\ n\sigma^2 P_r(E) = \mathfrak{M}_E \Bigl(\bigl(\sum_{r=1}^{\theta_n} \bar{x}_r y_r\bigr)^2\Bigr) \geqq \mathfrak{M}_{\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu} (\text{''})$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} m_{F_\nu}(\eta) \geqq c^2 n \sigma^2 \sum_{\nu=1}^{n} P_r(F_\nu)$$

$$= c^2 n \sigma^2 P_r\left((\xi, \eta) \in E,\ \underset{\mu \leqq n}{Max} \left| \sum_{\nu=1}^{\theta_\mu} \bar{x}_\nu y_\nu \right| > c\sqrt{n}\sigma \right)$$

ガ成立シ

$$\frac{P_r\left((\xi, \eta) \in E,\ \underset{\mu \leqq n}{Max} \left| \sum_{\nu=1}^{\theta_\mu} \bar{x}_\nu y_\nu \right| > c\sqrt{n}\sigma \right)}{P_r(E)} \leqq \frac{1}{c^2}$$

即チEナル條件附確率ニ對シテ *Kolmogoroff* ノ不等式ガ成立スル。故ニ

$$\frac{P_r(E \frown F)}{P_r(E)} = 1$$

即チ求ムル(7)式ガ證明セラレタ。

原稿ヲ送ツタ後位相數學第三卷第一號ヲ受取リマシタ。其所ノ樋口氏「Kollective ノ存在ノ問題ニ就テ」ニ附ケ加ヘテ見テ戴ケレバ幸甚デス。